循環小数についての種々の考察

2008年5月
奥村　清志

1　序論

たとえば $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\cdots$, $\frac{6}{7}$ を小数で表すと,

$$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots,\quad \frac{2}{7}=0.285714285714\cdots,\quad \frac{3}{7}=0.428571428571\cdots$$

$$\frac{4}{7}=0.571428571428\cdots,\quad \frac{5}{7}=0.714285714285\cdots,\quad \frac{6}{7}=0.857142857142\cdots$$

となり, 循環節 (小数部の繰り返し単位) だけを取り出すと, 次表のようになる。

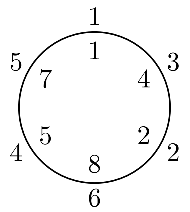
分子	1	2	3	4	5	6
循環節	142857	285714	428571	571428	714285	857142

これらはどれも共通の ″142857″ が6通りにシフトしただけのものであることがわかる。$\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, $\cdots$, $\frac{12}{13}$ については次のようになる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
076923	153846	230769	307692	384615	461538	538461	615384	692307	769230	846153	923076

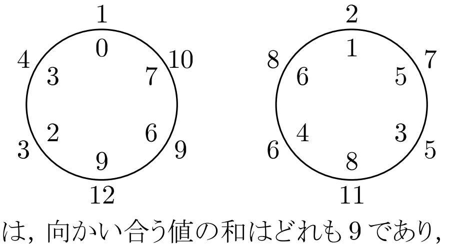
これも, 2つのパターン ″076923″, ″153846″ がそれぞれ6通りにシフトしたものから構成されている。

このように, 共通の構造がシフトしてできた組を「シフト系」と呼ぶことにする。シフト系を1つの円周上に並べてみると, ある特徴が見えてくる。たとえば分母が7の場合だと, 次のようになる。



この円は次のようにして作られている。まず, 円の内側に, 循環節の一つ ″142857″ を右回りに並べる。そして, 円の外側には, 対応する分子を書く。たとえば, 分子が1のとき循環節は142857となるから, 循環節の先頭である ″1″ の外側に ″1″ を書く。分子が2のときには循環節は285714となるから, 循環節の先頭である ″2″ の外側に ″2″ を書く。分子が3のときには循環節は428571となるから, 循環節の先頭である ″4″ の外側に ″3″ を書く。この操作を繰り返し, 最後は, 分子が6のとき循環節は857142となるから, 循環節の先頭である ″8″ の外側に ″6″ を書く。

このようにしてシフト系を1つの円の形に並べると, 円の内側の値については, 向かい合う値の和はどれも9である。円の外側の値については, 向かい合う値の和はどれも7である。同じことが, 分母が13のときにも言える。分母が13のときは, シフト系が2組できるので, 円も2個できる。それを次に示す。



これも, 円の内側の値については, 向かい合う値の和はどれも9であり, 外側の値については, 向かい合う値の和はどれも13である。

分母がたとえば 161 $(=7\times 23)$ のような合成数の場合には，$\frac{1}{161}\sim\frac{160}{161}$ の中に既約でないものが含まれる。既約でないものについては，約分して既約分数に書き換えることにすると，$\frac{1}{161}\sim\frac{160}{161}$ の160個の分数は，

$$\frac{1}{7}\sim\frac{6}{7},\quad \frac{1}{23}\sim\frac{22}{23}\quad \text{および}\quad \frac{161\text{と互いに素}}{161}$$

の3つの種類に分類できる。分母が7の分数はすでに調べたとおりである。分母が23の分数については，割り算してみると，長さ22のシフト系が1組できることがわかる。3番目の種類も，同じく割り算してみることにより，長さ66のシフト系が2組できることがわかる。そして，これらのどのシフト系についても，上のように円を描いてみると，同じ性質が成り立っているのである。

本論文の目的の一つは，この性質がどこまで一般性をもっているかを調べることである。つまり，分母がどういう条件を満たす数であればこれが成り立つのかを明確にすることである。さらには，これと類似の性質で，より広範に成り立つ一般的な性質がないかどうかを調べることである。

本論文の第2の目的は，分母を任意に与えたとき，それを分母とする1より小さい既約分数が，どのような長さのシフト系に分解されるかを考察することである。分母が素数のときは比較的単純だが，分母が一般の合成数になると難しい問題となる。任意の自然数に対して，それを分母とする既約分数（無限循環小数になるとして）のシフト系の長さを表す一般式を作ることが，その最終目的である。

（記号）

本論文中で多く用いられる記号をいくつか定義しておく。a が b の約数であることを $a\,|\,b$ と表す。また，$a, b, \cdots, c$ の最大公約数を $(a, b, \cdots, c)$ と表し，$a, b, \cdots, c$ の最小公倍数を $\mathrm{LCM}(a, b, \cdots, c)$ と表す。なお，$a, b, \cdots, p, q, \cdots$ 等の文字は，特に断りがなくても常に整数（主には自然数）を表している。

2　基本循環節，純循環小数

本論文中で扱う分数は，特別な場合を除き，常に1より小さい正の既約分数に限っている。用語をいくつか定義しておく。

無限循環小数における繰り返し単位を**循環節**と呼ぶ。ただし，循環節は，可能な限り小数点に近いところから始まるものをとることにする。また，循環節のうち，最小の長さのものを**基本循環節**と呼ぶ。

たとえば $\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots$ は，最初の ″14″ を飛ばして ″285714″ から循環が始まると見ることもできるが，可能な限り小数点に近いところから始まるものを循環節と呼ぶことにすれば，この場合の循環節は ″142857″，″142857142857″，″142857142857142857″ などであって，″285714″ は循環節ではない。また，基本循環節は ″142857″ である。

循環節が小数第1位から始まる無限循環小数を**純循環小数**と呼ぶことにする。それに対して，循環節が小数第1位から始まらない無限循環小数（小数部の先頭に循環しない部分を含む無限循環小数）を**混循環小数**と呼ぶ。たとえば $\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots$ は純循環小数だが，$\frac{1}{6}=0.16666\cdots$ や $\frac{1}{30}=0.03333\cdots$ は混循環小数である。

次の定理は，本論文において重要な働きをする基本定理である。

【定理1】
既約分数 $\frac{k}{n}$ が無限循環小数であるとき，小数第1位から長さ r の循環節が始まることと，$10^r\equiv 1 \pmod{n}$ が成り立つことは同値である。

（証明）

既約分数 $\frac{k}{n}$ を小数で表したとき，小数第1位から長さ r の循環節が始まる無限循環小数になるとすると，

$10^r \cdot \frac{k}{n}$ と $\frac{k}{n}$ の小数部は等しいから，その差をとることにより，$(10^r - 1) \cdot \frac{k}{n}$ は整数である。ここで，$(k, n) = 1$ だから，$n \mid (10^r - 1)$ でないといけない。すなわち，

$$10^r - 1 \equiv 0 \pmod{n} \qquad \therefore 10^r \equiv 1 \pmod{n}$$

逆に，$10^r \equiv 1 \pmod{n}$ とすると，$n \mid (10^r - 1)$ だから，$\frac{10^r - 1}{n} \cdot k = 10^r \cdot \frac{k}{n} - \frac{k}{n}$ は整数である。すなわち，$10^r \cdot \frac{k}{n}$ と $\frac{k}{n}$ の小数部は等しい。$\frac{k}{n}$ が無限循環小数になることは前提にされているから，その小数部を r 個ずつ区切って，

$$\frac{k}{n} = 0.\boxed{A_1}\boxed{A_2}\cdots\cdots\boxed{A_m}\boxed{A_{m+1}}\cdots\cdots$$

とすると，

$$10^r \cdot \frac{k}{n} = \boxed{A_1}.\boxed{A_2}\boxed{A_3}\cdots\cdots\boxed{A_{m+1}}\boxed{A_{m+2}}\cdots\cdots$$

であり，両式の小数部が等しいことより，すべての自然数 m に対して $A_{m+1} = A_m$ がいえ，$A_1, A_2, \cdots$ はすべて等しい。よって $\frac{k}{n}$ は，小数第1位から始まる長さ r の循環節をもつ。 Q.E.D.

上の定理と基本循環節の定義より，純循環小数における基本循環節の長さは，$10^r \equiv 1 \pmod{n}$ を満たす最小の自然数 r である。これは分母 n のみに依存し，分子にはよらないから，既約分数であるかぎり，分子にかかわらず基本循環節の長さは一定である。そこで，今後，n を分母とする既約分数が純循環小数になるとき，その基本循環節の長さを $r(n)$ と表すことにする。

次の定理は，純循環小数の特徴を決定づけるものである。

【定理 2】
既約分数が純循環小数になるとき，分母は必ず10と互いに素である。逆に，分母（1より大）が10と互いに素である既約分数を小数で表すと，必ず純循環小数になる。

（証明）

既約分数 $\frac{k}{n}$ を小数で表すと純循環小数になるとし，その基本循環節の長さを r とすると，定理1より，

$$10^r \equiv 1 \pmod{n}$$

である。よって，

$$10^r = 1 + an \quad \text{すなわち} \quad 10^{r-1} \cdot 10 - an = 1 \quad (r \geqq 1 \text{ より } 10^{r-1} \text{ は整数})$$

をみたす整数 a が存在する。故に，$(n, 10) = 1$ である。

逆を示す。$(n, 10) = 1$ なる $n\ (> 1)$ を分母とする既約分数 $\frac{k}{n}$ を考える。これが有限小数になるとすると，適当な自然数 t をとることによって $\frac{k}{n} \cdot 10^t$ は整数になるが，$(n, k) = 1$，$(n, 10) = 1$ より，これは不可能である。よって，$\frac{k}{n}$ は無限循環小数である。これが純循環小数でないと仮定する。すなわち，$\frac{k}{n}$ を小数で表したとき，小数第 s 位までが循環しない部分となり，第 $s+1$ 位から長さ r の循環節が始まるとする。ただし，$s \geqq 1$，$r \geqq 1$ である。そのとき，$10^s \cdot \frac{k}{n}$ と $10^{s+r} \cdot \frac{k}{n}$ の小数部は一致するから，

$$10^{s+r} \cdot \frac{k}{n} - 10^s \cdot \frac{k}{n} = 10^s (10^r - 1) \cdot \frac{k}{n}$$

は整数である。この式において，$(k, n) = 1$，$(10, n) = 1$ だから，$n \mid (10^r - 1)$ である。つまり，

$$10^r - 1 \equiv 0 \pmod{n} \qquad \therefore 10^r \equiv 1 \pmod{n}$$

である。すると，定理1より循環節は小数第1位から始まることになって，$s \geqq 1$ に反する。これで逆も示された。 Q.E.D.

上の定理により，既約分数が純循環小数になることと，分母が10と互いに素であることとは同値であることが

わかった。次に，混循環小数に関する重要な性質を示す。そのための補題を先に示す。

【補題1】
1より大きい整数 a, b において $(a, b)=1$ であれば，$\frac{c}{ab}=\frac{k}{a}+\frac{l}{b}$ を満たす整数 k, l が存在する。しかも，$\frac{c}{ab}$ が既約分数のときには，$k \neq 0$，$l \neq 0$ であり，また $\frac{k}{a}$，$\frac{l}{b}$ はそのままで既約分数である。

(証明)

$(a, b)=1$ のとき，$al'+bk'=1$ を満たす整数 k', l' が存在する。この式を c 倍することにより，$al+bk=c$ となる整数 k, l が存在する。その k, l を用いることにより，

$$\frac{c}{ab}=\frac{al+bk}{ab}=\frac{k}{a}+\frac{l}{b}$$

となる。また，たとえば $k=0$ とすると，$\frac{c}{ab}=\frac{l}{b}$ より $c=al$ となり，$a>1$ より $\frac{c}{ab}$ は既約分数でなくなる。$l=0$ のときも同様である。よって，$\frac{c}{ab}$ が既約分数のときには，$k \neq 0$，$l \neq 0$ である。

次に，$al'+bk'=1$ より，$(a, k')=1$ である。さらに $\frac{c}{ab}$ が既約であるとすれば，$(a, c)=1$ である。ゆえに，$(a, ck')=1$ すなわち $(a, k)=1$ である。同様に，$(b, l)=1$ である。よって，$\frac{c}{ab}$ が既約であれば，$\frac{k}{a}$ と $\frac{l}{b}$ はそのままで既約分数である。　Q.E.D.

これを用いて，混循環小数に関する次の定理が示される。

【定理3】
混循環小数は必ず純循環小数と有限小数の和として表され，しかも，純循環小数を開区間 $(0, 1)$ に限定したときには，和の表し方はただ1通りに確定する。

(証明)

定理2より，混循環小数 (純循環小数でない無限循環小数) は $\frac{a}{2^r5^sn}$ の形の既約分数で表される。ただし，r, s の少なくとも一方は0でなく，$n>1$，$(n, 10)=1$ である。これらより，$(2^r5^s, n)=1$ となり，しかも，$2^r5^s>1$，$n>1$ である。よって，補題1より

$$\frac{a}{2^r5^sn}=\frac{b'}{2^r5^s}+\frac{c'}{n}$$

と表され，$b' \neq 0, c' \neq 0$ である。ここで，$\max(r, s)=u$ とすると，$\frac{b'}{2^r5^s}\cdot 10^u$ は整数になるから，$\frac{b'}{2^r5^s}$ は有限小数である。また，補題1の後半より $\frac{c'}{n}$ は既約分数である。なお，$\frac{c'}{n}$ が区間 $(0, 1)$ の範囲に収まらないときには，それに適当な整数を加えることによって区間 $(0, 1)$ に収めることができる (c' と n は互いに素だから，整数を加えても，分母は n のままの既約分数になる)。調整のために加えた整数は，有限小数の方から差し引いておけばよい (その結果，有限小数の方も，分母は 2^r5^s のままの既約分数となる)。

そのようにして得られた結果を

$$\frac{a}{2^r5^sn}=\frac{b}{2^r5^s}+\frac{c}{n} \quad \left(0<\frac{c}{n}<1\right)$$

とする。この式において，$(n, 10)=1$ だから，定理2より $\frac{c}{n}$ は純循環小数である。

これで前半が示された。後半を示す。もし上のような和の表現が2通りあったとし，

$$\frac{b_1}{2^r5^s}+\frac{c_1}{n}=\frac{b_2}{2^r5^s}+\frac{c_2}{n}$$

とする。ただし，分数はすべて既約であり，$0<c_1<n$，$0<c_2<n$ である。また，$(2^r5^s, n)=1$ である。分母を払って整理すると，

$$(b_1 - b_2)n = (c_2 - c_1) \cdot 2^r 5^s$$

左辺は n の倍数だから，右辺も n の倍数。ところが $(n,\, 2^r 5^s) = 1$ だから，$n \mid c_2 - c_1$ でなければならない。一方，$0 < c_1 < n$，$0 < c_2 < n$ より $|c_2 - c_1| < n$ である。故に，$c_2 - c_1 = 0$ すなわち $c_1 = c_2$ である。そのとき，$b_1 = b_2$ となる。これで，和の表現は1通りに決まることが示された。 Q.E.D.

このように，混循環小数は，有限小数の差を度外視すれば，それぞれある特定の純循環小数に対応している。そこで，以後は純循環小数の性質のみを調べていくことにする。

純循環小数の基本循環節の長さに関して，次の定理が重要である。

【定理4】

既約分数 $\frac{k}{n}$ を小数で表したとき純循環小数になるとすると，その基本循環節の長さ $r(n)$ は，$r(n) \mid \varphi(n)$ を満たす。ただし，$\varphi(n)$ はオイラーの関数である。

（証明）

基本循環節の長さ $r(n)$ を r と表すと，r は

$$10^r \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数である。この r が $\varphi(n)$ の約数であることを示す。そのために，$\varphi(n)$ を r で割ったときの商を Q，余りを R とする $(0 \leqq R < r)$。すると，

$$10^{\varphi(n)} = 10^{rQ+R} = \left(10^r\right)^Q 10^R \equiv 10^R \pmod{n} \quad (\because 10^r \equiv 1)$$

となる。一方，$\frac{k}{n}$ は純循環小数だから $(n,\, 10) = 1$ である。よって，フェルマーの定理より，

$$10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

上の2つの式より，$10^R \equiv 1 \pmod{n}$ となる。ここで，$0 \leqq R < r$ だから，$R \neq 0$ とすると，上の式を満たす最小の自然数が r であることに反する。よって，$R = 0$ である。すなわち，$r = r(n)$ は $\varphi(n)$ の約数である。

Q.E.D.

3　シフト系とその性質（その1）

分母をともにする既約分数の基本循環節からなる集合は，必ずシフト系と呼ばれる組に類別される。まず，そのことを示す。

【定理5】

1より小さい既約分数 $\frac{k}{n}$ が純循環小数になるとし，その基本循環節が $A = \left[a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_r\right]$ であるとすると，A の任意のシフト形を基本循環節とする分数が，n を分母とする1より小さい既約分数の中に必ず1つだけある。

（証明）

A を s 回シフトした循環節を A_s とすると，A_s は $10^s \cdot \frac{k}{n}$ の小数部の基本循環節である。また，n を法とする剰余類において，

$$10^s k \equiv m \pmod{n} \qquad (0 \leqq m < n)$$

であるとすると，$10^s k - m = an$ となる整数 a が存在する。この式を n で割ることにより，$10^s \cdot \frac{k}{n}$ と $\frac{m}{n}$ の差は整数である。すなわち，両者の小数部は等しい。よって，A_s は $\frac{m}{n}$ の基本循環節である。また仮定より，$\frac{k}{n}$ は既約で，しかも純循環小数をなすから，

$$(n,\,k)=1,\quad (n,\,10)=1\quad \therefore\,(10^s k,\,n)=1$$

よって，$m=10^s k-an$ も n と互いに素である。以上より，A_s を基本循環節とする1より小さい既約分数 $\frac{m}{n}$ が存在することがいえた。

また，0と1の間に小数部が一致する数が2個存在することはないから，上の条件を満たす $\frac{m}{n}$ はただ1つである。 Q.E.D.

これで，n を分母とする既約分数が長さ r の基本循環節をもてば，それを r 通りにシフトしたどの形に対しても，それを基本循環節とする分数が，n を分母とする既約分数の中に必ず1つだけ存在することがわかった。つまり，分母が n の既約分数の基本循環節からなる集合は，r 個で1組のシフト系に類別される（どのシフト系にも属さない基本循環節はない）のである。

これが定理4の別証を与えることも明らかである。なぜなら，分母 n の既約分数は0と1の間に全部で $\varphi(n)$ 個あり，それらの基本循環節の長さはすべて $r(n)$ である。$\varphi(n)$ 個の分数が $r(n)$ 個で1組のシフト系に類別されるから，$r(n)\,|\,\varphi(n)$ でなければならない。

続いて，各シフト系がもっている性質を調べることにする。一般的な性質を調べる前に，状況を少し制約した場合から考察することにする。

【定理6】

n を2, 5以外の素数とし，既約分数 $\frac{k}{n}$ の基本循環節 A の長さが偶数であるとする（その長さを $2r$ とする）と，$A=\left[a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_r,\,b_1,\,b_2,\,\cdots,\,b_r\right]$ に対して，次の(1),(2)が成り立つ。

(1) $a_i+b_i=9\quad (i=1,\,2,\,\cdots,\,r)$

(2) $\frac{n-k}{n}$ の基本循環節は，A を r 回シフトした $\left[b_1,\,b_2,\,\cdots,\,b_r,\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_r\right]$ に等しい。

（証明）

まず(1)を示す。定理1より

$$10^{2r}\equiv 1\pmod{n}$$

すなわち，

$$10^{2r}-1=(10^r+1)(10^r-1)\equiv 0\pmod{n}$$

ここで，$2r$ は基本循環節の長さだから，それより短い循環節は存在しない。よって，ふたたび定理1より，$10^r-1\not\equiv 0\pmod{n}$ である。これと n が素数であることより，

$$10^r+1\equiv 0\pmod{n}\tag{3–1}$$

である。また，

$$\frac{k}{n}=0.a_1a_2\cdots a_rb_1b_2\cdots b_r\cdots\cdots$$

$$10^r\cdot\frac{k}{n}=a_1a_2\cdots a_r.b_1b_2\cdots b_ra_1a_2\cdots a_r\cdots\cdots$$

の2式において，左辺の和は $\frac{(10^r+1)k}{n}$ であり，これは(3–1)より整数である。故に，右辺の和も整数となり，右辺の小数部の和は1でないといけない。すなわち，

$$(0.a_1a_2\cdots a_rb_1b_2\cdots b_r\cdots\cdots)+(0.b_1b_2\cdots b_ra_1a_2\cdots a_r\cdots\cdots)=1=(0.999\cdots\cdots)$$

よって，

$$\begin{aligned}(0.a_1a_2\cdots a_rb_1b_2\cdots b_r\cdots\cdots)&=(0.999\cdots\cdots)-(0.b_1b_2\cdots b_ra_1a_2\cdots a_r\cdots\cdots)\\&=0.(9-b_1)(9-b_2)\cdots(9-b_r)(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_r)\cdots\end{aligned}$$

となり，

$$a_i=9-b_i\quad \therefore\, a_i+b_i=9\quad (i=1,\,2,\,\cdots,\,r)$$

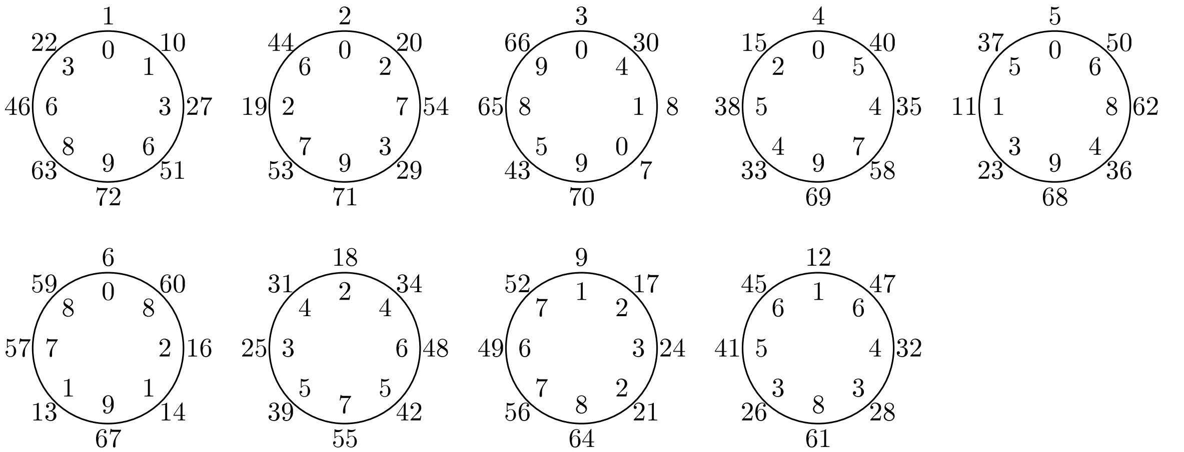
（注）0 以外の有限小数を 9 が無限に続く無限循環小数の形に表すものとすれば，0 を除くすべての実数は無限小数となる。しかもその表し方は一意である。したがって，2 つの無限小数が等いとき，対応する位の数はすべて等しい。

次に (2) を示す。そのためには，$10^r\cdot\frac{k}{n}$ と $\frac{n-k}{n}$ の小数部が一致することを示せばよい。両者の差をとると，

$$10^r\cdot\frac{k}{n}-\frac{n-k}{n}=(10^r+1)\cdot\frac{k}{n}-1$$

この式において，(3‒1) より $\frac{10^r+1}{n}$ は整数である。よって，$(10^r+1)\cdot\frac{k}{n}-1$ は整数である。これで $10^r\cdot\frac{k}{n}$ と $\frac{n-k}{n}$ の小数部が一致することが示された。 Q.E.D.

定理 6 によって，素数を分母とする既約分数の基本循環節の長さが偶数である場合には，$n=7$ に限らず，序論で示した性質が成り立つことが示された。たとえば，$n=73$ （$\varphi(73)=72$） の場合だと，長さ 8 のシフト系が 9 組でき，それらを円で図示すると，次のようになる。



どの円においても，円の内側の対極の和は 9 であり，円の外側の対極の和は 73 である。

なお定理 6 は，分母が素数であることを前提にしている。分母が合成数だと，シフト系の長さが偶数であっても，この性質は必ずしも成り立つとはかぎらない。成り立つか成り立たないかが何によって決まるのかは，4 章でシフト系の長さについて詳しく調べたあとでないと見えてこない。そこで，この問題については 5 章で再び取り扱うことにする。

基本循環節の長さが奇数の場合 (たとえば分母が 37 だと基本循環節の長さは 3，分母が 41 だと基本循環節の長さは 5) には，図式化しても向き合った対極が存在しないので，偶数のときと同じ性質は成り立たない。奇数の場合をも含めて，一般に成り立つ性質は次の定理 7 である。

【定理 7】

既約分数 $\frac{k}{n}$ が純循環小数をなし，その基本循環節が $A=\left[a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_r\right]$ であるとする。A の各シフトに応じた分子を $k_1,\,k_2,\,\cdots,\,k_r$ としたとき，

$$\sum_{i=1}^{r}a_i\equiv 0\pmod 9,\qquad \sum_{i=1}^{r}k_i\equiv 0\pmod n$$

が成り立つ。ただし，n は 10 と互いに素であることに加えて，3 とも互いに素であるとする。

(証明)

$$\frac{k_1}{n}=0.\dot{a}_1a_2\cdots a_{r-1}\dot{a}_r$$

$$\frac{k_2}{n}=0.\dot{a}_2a_3\cdots a_r\dot{a}_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{k_r}{n} = 0.\dot{a}_r a_1 \cdots a_{r-2}\dot{a}_{r-1}$$

とする。各辺を10倍すると，

$$10 \cdot \frac{k_1}{n} = a_1 + \frac{k_2}{n} \quad \Rightarrow \quad 10k_1 = a_1 n + k_2$$

$$10 \cdot \frac{k_2}{n} = a_2 + \frac{k_3}{n} \quad \Rightarrow \quad 10k_2 = a_2 n + k_3$$

$$\vdots$$

$$10 \cdot \frac{k_r}{n} = a_r + \frac{k_1}{n} \quad \Rightarrow \quad 10k_r = a_r n + k_1$$

右側の式の辺々を加えると，

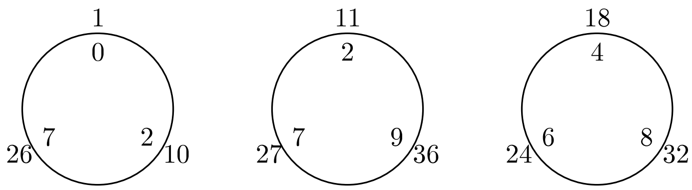
$$10\sum_{i=1}^{r} k_i = n\sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=1}^{r} k_i \qquad \therefore 9\sum_{i=1}^{r} k_i = n\sum_{i=1}^{r} a_i$$

また，$(n, 3) = 1$ より $(n, 9) = 1$ である。よって上式より，$\sum_{i=1}^{r} k_i$ は n の倍数，$\sum_{i=1}^{r} a_i$ は9の倍数となる。すなわち，

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \equiv 0 \pmod 9, \qquad \sum_{i=1}^{r} k_i \equiv 0 \pmod n$$

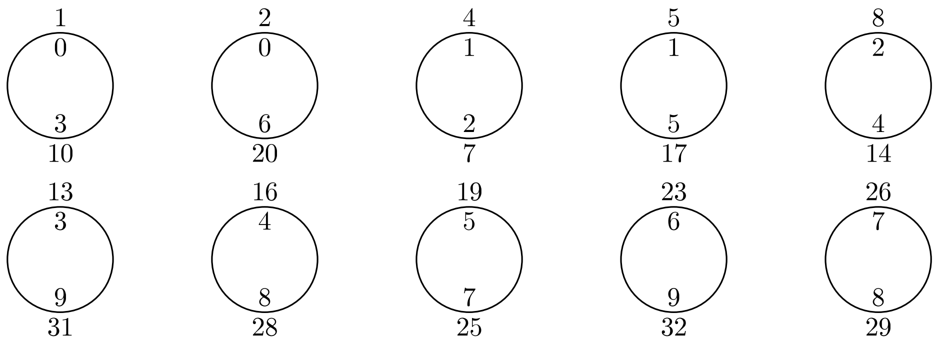
Q.E.D.

たとえば $n = 37$ の場合，3個1組のシフト系が12組できるが，そのうちのいくつかを円に図式化すると，下のようになる。



たしかに定理7が成り立っていることがわかる（円の内側の和は9の倍数であり，外側の和は37の倍数である）。

なお，定理7はその証明過程からわかるとおり，n が素数であることを特に必要としない。$(n, 30) = 1$ であれば，常に成り立つ性質である。ただし，$(n, 30) \neq 1$ のときには，定理7の成立は保証されない。たとえば，分母が33（$\varphi(33) = 20$）の既約分数では，長さ2のシフト系が10組できる。それらをすべて図示すると，次のようになる。どのシフト系においても定理7の性質は成っていない。



なお，容易にわかるとおり，定理6は定理7の特殊形である。

4　シフト系の長さ

4.1　分母が素数のとき

すでに述べてきたとおり，10 と互いに素な分母 n が与えられたとき，区間 $(0, 1)$ に属する既約分数の基本循環節の長さ $r(n)$ は，分子によらず一定である。なお $r(n)$ は

$$10^r \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 r として求められる。いくつかの素数 n について，$r(n)$ を実際に求めてみると，次表のようになる (2000 以下の全素数 p に対する $r(p)$ の値を，最後の付録に載せておく)。

n	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61
$r(n)$	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46	13	58	60

なお，素数 n の値から直ちに $r(n)$ が求められるという，単純な関係式はわかっていない。はっきりしているのは $r(n) \mid \varphi(n)$ という事実だけである。n が素数のときには $\varphi(n) = n - 1$ だから，$r(n) \mid (n-1)$ である。

以下では，分母 n が合成数の場合のシフト系の長さ $r(n)$ を求めることにするが，そこでは，素数 p に対する $r(p)$ は既知であることを前提とする。

4.2　分母が素数の冪乗のとき

p を 2, 5 以外の素数，k を自然数として，p^k を分母とする既約分数のシフト系の長さ $r(p^k)$ について調べる。まず，いくつかの具体例を計算してみると，次のようになる。

分母 n	3	7	11	13	17	19	37
$r(n)$	1	6	2	6	16	18	3
分母 n	3^2	7^2	11^2	13^2	17^2	19^2	37^2
$r(n)$	1	$42 = 6 \cdot 7$	$22 = 2 \cdot 11$	$78 = 6 \cdot 13$	$272 = 16 \cdot 17$	$342 = 18 \cdot 19$	$111 = 3 \cdot 37$
分母 n	3^3	7^3	11^3	13^3	17^3	19^3	37^3
$r(n)$	3	$294 = 6 \cdot 7^2$	$242 = 2 \cdot 11^2$	$1014 = 6 \cdot 13^2$	$4624 = 16 \cdot 17^2$	$6458 = 18 \cdot 19^2$	$4107 = 3 \cdot 37^2$

この表を見ると，3 は例外だが，それ以外の素数 p に対しては，p^l に対するシフト系の長さはどれも $r(n)p^{l-1}$ となっている。この表に限らず，2 桁の素数すべてを対象として計算してみても，結果は同じである。

このことから当初，筆者は，「3 (と 2, 5) を例外として，それ以外の全素数に対して上の規則が成り立つ」と予想し，証明を試みた。しかし，やがて $p = 487$ という例外が見つかったため，証明の試みは徒労であることがわかった。

そこで次に，例外となる素数を探す方向に研究を進めた。しかし，素数の範囲を 100 万まで拡大したところからは，3 と 487 以外の例外は見つからなかった。全素数の中で，例外となる素数は非常にわずかな割合しか占めていないことが，これによって予測される。ただし，そのような素数が無数にあるのか，それとも有限個なのかという点に関しては，現段階では不明である。

大型コンピュータを使用して大規模に調べれば，何らかの傾向が判明する可能性はあるが，それだけでは，有限個か無限個かという問題の解決にはならない。一般的な考察が必要である。ただし，そうした考察は筆者の当面の課題からは逸れるので，例外探しはいったん中断し，3 と 487 にも適用できる (もしそれ以外の例外があれば，それらにも適用できる)，より一般化された規則の構築を試みることにする。

まず次の定理 8 が，3 や 487 のような素数と，一般の素数とを区別するキーポイントになる。

【定理 8】

p を 2, 5 以外の素数とするとき，$10^{r(p)} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ であれば，$r(p^k) = r(p)p^{k-1}$ である。ただし，k は自然数である。

(証明)

$r(p)=r$ とおく。定理の仮定より $10^r\equiv 1 \pmod p$, $10^r \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ であるから,

$$10^r = 1+ap, \quad (a,\,p)=1$$

となる整数 a が存在する。また $r(p^k)=s$ とおくと, s は

$$10^s\equiv 1 \pmod{p^k}$$

を満たす最小の自然数である。そのとき, $10^s\equiv 1 \pmod p$ でもあるから, s は r の倍数である。さらに, 定理 4 より, s は $\varphi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$ の約数であり, r は $\varphi(p)=p-1$ の約数である。故に,

$$s = mrp^l \quad \left(1\leqq m\leqq \frac{p-1}{r},\quad 0\leqq l\leqq k-1\right)$$

とおける。今から, m の値にかかわらず $l=k-1$ であることを示す。

$$\begin{aligned}10^{mr} &= (1+ap)^m\\ &= 1+map+{}_m\mathrm{C}_2a^2p^2+\cdots\cdots+a^mp^m\\ &= 1+p\,(ma+{}_m\mathrm{C}_2a^2p+\cdots\cdots+a^mp^{m-1})\end{aligned}$$

において, $m\leqq\frac{p-1}{r}<p$ より $(m,\,p)=1$ であり, また $(a,\,p)=1$ であるから, $ma+{}_m\mathrm{C}_2a^2p+\cdots\cdots+a^mp^{m-1}$ は p と互いに素である。故に,

$$10^{mr}=1+bp, \quad (b,\,p)=1 \qquad (4\text{–}1)$$

とおくことができる。次に, i を自然数として,

$$(1+bp^i)^p = 1+pbp^i+{}_p\mathrm{C}_2b^2p^{2i}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_jb^jp^{ij}+\cdots\cdots+b^pp^{ip}$$

を考える。この式において, p が素数であることより, ${}_p\mathrm{C}_j$ $(1\leqq j\leqq p-1)$ は p の倍数である。故に,

$$(1+bp^i)^p = 1+bp^{i+1}+c_2p^{2i+1}+c_3p^{3i+1}+\cdots\cdots+c_{p-1}p^{i(p-1)+1}+b^pp^{ip}$$

と表せる。ここで, $i\geqq 1$, $p\geqq 3$ より

$$2i+1,\ 3i+1,\ \cdots,\ i(p-1)+1,\ ip$$

はすべて $i+2$ 以上である。よって,

$$(1+bp^i)^p = 1+(b+dp)p^{i+1} \quad (d\text{ は整数})$$

と表され, しかも $(b,\,p)=1$ より, $(b+dp,\,p)=1$ である。故に,

$$(1+bp^i)^p = 1+cp^{i+1}, \quad (c,\,p)=1$$

と表現できる。この式を繰り返し用いることにより,

$$\begin{aligned}&10^{mrp} = (1+bp)^p = 1+c_1p^2, \quad (c_1,\,p)=1\\ &10^{mrp^2} = (1+bp)^{p^2} = (1+c_1p^2)^p = 1+c_2p^3, \quad (c_2,\,p)=1\\ &\qquad\vdots\\ &10^{mrp^{k-2}} = (1+bp)^{p^{k-2}} = (1+c_{k-3}p^{k-2})^p = 1+c_{k-2}p^{k-1}, \quad (c_{k-2},\,p)=1\\ &10^{mrp^{k-1}} = (1+bp)^{p^{k-1}} = (1+c_{k-2}p^{k-1})^p = 1+c_{k-1}p^k, \quad (c_{k-1},\,p)=1\end{aligned}$$

となる。これと (4–1) より, $10^{mrp^l}\equiv 1 \pmod{p^k}$ となる最小の l は $l=k-1$ であることがわかる。これは m に関係なく言えるから, $10^s\equiv 1 \pmod{p^k}$ を満たす最小の s は, $m=1$ のときの $s=rp^{k-1}$ である。すなわち, $r(p^k)=rp^{k-1}$ である。 Q.E.D.

100 万以下の素数に限れば, 定理 8 の仮定が成り立たない素数は 3 と 487 だけである。それ以外の素数 p では, 定理 8 の仮定が成り立ち, $r(p^k)=r(p)p^{k-1}$ となる。なお, $p=3$, 487 の場合には次のようになる。

まず $p=3$ の場合, $10\equiv 1 \pmod 3$ だから, $r(3)=1$ である。またそのとき, $10\equiv 1 \pmod{3^2}$ も成立する。しかし, $10\equiv 1 \pmod{3^3}$ とはならない。このような素数を (10 をベースとした) **ランク 2 の素数**と呼ぶことにする。

487もランク2の素数である。実際，487に対する $r(487)$ を求めると，$r(487)=486$ となり，

$$10^{486} \equiv 1 \pmod{487}$$

である。そのとき同時に，

$$10^{486} \equiv 1 \pmod{487^2}$$

も成立していることが確かめられる。しかし，

$$10^{486} \not\equiv 1 \pmod{487^3}$$

である。よって，487はランク2の素数である。

一般には，$10^{r(p)} \equiv 1 \pmod{p^e}$ は成り立つが，$10^{r(p)} \equiv 1 \pmod{p^{e+1}}$ は成り立たないとき，素数 p はランク e の素数である。

筆者が検証した100万以下の素数の中では，ランク2の素数は3と487のみであり，ランク3以上の素数は存在しない。ほぼすべての素数がランク1の素数である。100万より大きい素数の中に，ランク2以上の素数がどのように分布しているのかについては，現段階では不明である。

次に，任意のランクの素数に適用できるように定理8を一般化すると，次のようになる。

【定理9】

p を2, 5以外の素数とする。p がランク e の素数のとき，

$$r(p^k) = \begin{cases} r(p) & (1 \leqq k \leqq e \text{ のとき}) \\ r(p)p^{k-e} & (k > e \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。ただし，k は自然数である。

(証明)

$r(p)=r$ とおく。p はランク e の素数だから，$1 \leqq k \leqq e$ のとき，

$$10^s \equiv 1 \pmod{p^k}$$

を満たす最小の自然数sは r に等しい。故に，$1 \leqq k \leqq e$ のとき，$r(p^k)=r$ である。

次に，$k>e$ のときを考える。s を

$$10^s \equiv 1 \pmod{p^k}$$

を満たす最小の自然数とする。定理8の証明とまったく同様に，

$$s = mrp^l \quad \left(1 \leqq m \leqq \frac{p-1}{r},\quad 0 \leqq l \leqq k-1\right)$$

とおける。また p がランク e の素数であることより，

$$10^r = 1 + ap^e, \quad (a, p) = 1$$

となる整数 a が存在し，定理8の証明とまったく同様に，m に関わらず

$$10^{mr} = 1 + bp^e, \quad (b, p) = 1 \tag{4-2}$$

とおくことができる。次に，i を0以上の整数として，

$$(1+bp^{e+i})^p = 1 + pbp^{e+i} + {}_p\mathrm{C}_2 b^2 p^{2(e+i)} + \cdots\cdots + {}_p\mathrm{C}_j b^j p^{j(e+i)} + \cdots\cdots + b^p p^{p(e+i)}$$

を考える。この式において，p は素数だから，${}_p\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq p-1)$ は p の倍数である。故に，

$$(1+bp^{e+i})^p = 1 + bp^{e+i+1} + c_2 p^{2(e+i)+1} + c_3 p^{3(e+i)+1} + \cdots\cdots + c_{p-1} p^{(p-1)(e+i)+1} + b^p p^{p(e+i)}$$

と表せる。ここで，$e \geqq 1,\ i \geqq 0,\ p \geqq 3$ より

$$2(e+i)+1,\ 3(e+i)+1,\ \cdots,\ (p-1)(e+i)+1,\ p(e+i)$$

はすべて $e+i+2$ 以上である。よって，

$$(1+bp^{e+i})^p = 1 + (b+dp)p^{e+i+1} = 1 + cp^{e+i+1}, \quad (c, p) = 1$$

と表現できる。この式を繰り返し用いることにより，

$$10^{mrp}=(1+bp^e)^p=1+c_1p^{e+1},\quad (c_1,\,p)=1$$
$$10^{mrp^2}=(1+bp^e)^{p^2}=(1+c_1p^{e+1})^p=1+c_2p^{e+2},\quad (c_2,\,p)=1$$
$$\vdots$$
$$10^{mrp^{k-e-1}}=(1+bp)^{p^{k-e-1}}=(1+c_{k-e-2}p^{e+(k-e-2)})^p=1+c_{k-e-1}p^{k-1},\quad (c_{k-e-1},\,p)=1$$
$$10^{mrp^{k-e}}=(1+bp)^{p^{k-e}}=(1+c_{k-e-1}p^{k-1})^p=1+c_{k-e}p^k,\quad (c_{k-e},\,p)=1$$
となる。これと(4–2)より，$10^{mrp^l}\equiv 1 \pmod{p^k}$ となる最小の l は $l=k-e$ である。これは m に関係なく言えるから，$10^s\equiv 1 \pmod{p^k}$ を満たす最小の s は，$m=1$ のときの $s=rp^{k-e}$ である。

これで，$k>e$ のとき，$r(p^k)=rp^{k-e}$ であることが示された。 Q.E.D.

定理9から，たとえば次のことがわかる。

$p=3$ はランク2の素数であり，また $r(3)=1$ である。故に，3と 3^2 を分母とする既約分数のシフト系の長さはどちらも1であり，3^3 を分母とする既約分数のシフト系の長さは $1\cdot 3=3$ である。また，3^4 を分母とする既約分数のシフト系の長さは $1\cdot 3^2=9$ である。実際，

$$\frac{1}{3}=0.\dot{3},\quad \frac{1}{3^2}=0.\dot{1},\quad \frac{1}{3^3}=0.\dot{0}3\dot{7},\quad \frac{1}{3^4}=0.\dot{0}1234567\dot{9}$$

となる。また，同じく $p=487$ もランク2の素数であり，$r(487)=486$ である。故に，487^3 を分母とする既約分数のシフト系の長さは，$486\cdot 487=236682$ である。

4.3　分母が一般の合成数のとき

最後に，一般の合成数を分母とする既約分数のシフト系の長さを考察する。その準備として，次の補題を示しておく。

【補題2】
10と互いに素である1より大きい自然数 $s,\,t$ が $s\,|\,t$ を満たせば，$r(s)\,|\,r(t)$ である。

(証明)

$s\,|\,t$ より $t=us$（u は自然数）とおけ，

$$10^{r(t)}=1+at=1+aus\equiv 1 \pmod{s}\qquad (a\text{は整数})$$

一方，$10^x\equiv 1 \pmod{s}$ を満たす最小の自然数 x は $r(s)$ であり，それ以外の x は $r(s)$ の倍数だから，$r(s)\,|\,r(t)$ である。 Q.E.D.

補題2を用いて，次の定理が証明される。

【定理10】
10と互いに素である1より大きい自然数 $m_1,\,m_2$ において，$(m_1,\,m_2)=1$ であれば，

$$r(m_1m_2)=\mathrm{LCM}(r(m_1),\,r(m_2))$$

(証明)

補題2より，

$$r(m_1)\,|\,r(m_1m_2),\quad r(m_2)\,|\,r(m_1m_2)\qquad \therefore \mathrm{LCM}(r(m_1),\,r(m_2))\,|\,r(m_1m_2)$$

が成り立つ。そこで，$\mathrm{LCM}(r(m_1),\,r(m_2))$ 自体が m_1m_2 を分母とする既約分数の循環節長になっていることが言えれば，そのような循環節長の最小値が $r(m_1m_2)$ であることより，$r(m_1m_2)=\mathrm{LCM}(r(m_1),\,r(m_2))$ が示されたことになる。つまり，$l=\mathrm{LCM}(r(m_1),\,r(m_2))$ としたとき，$10^l\equiv 1 \pmod{m_1m_2}$ を示せばよい。

$l=c_1r(m_1)=c_2r(m_2)$ とすると，

$$10^l=10^{c_1r(m_1)}=\left(10^{r(m_1)}\right)^{c_1}\equiv 1^{c_1}=1 \pmod{m_1}$$

同様に，$10^l \equiv 1 \pmod{m_2}$ である。よって，

$$10^l = 1 + am_1 = 1 + bm_2 \qquad \therefore\ am_1 = bm_2$$

となる整数 a, b が存在する。この式と $(m_1, m_2) = 1$ より，$m_2 \mid a$ である。そこで $a = cm_2$ とおく。すると，

$$10^l = 1 + am_1 = 1 + cm_1m_2 \equiv 1 \pmod{m_1m_2}$$

となる。以上で示された。 Q.E.D.

定理10を繰り返し用いることにより，次の定理11が得られる。

【定理11】
10と互いに素である1より大きい自然数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ において，$(m_i, m_j) = 1 \ (i \neq j)$ であれば，

$$r(m_1m_2\cdots m_k) = \mathrm{LCM}(r(m_1), r(m_2), \cdots, r(m_k))$$

定理9と定理11により，一般の合成数 n に対する $r(n)$ を求めることができる。つまり，

$n = p^kq^l\cdots s^m$ ($p, q, \cdots, s$ は2, 5以外の互いに異なる素数，$k, l, \cdots, m$ は自然数) としたとき，$p^k, q^l, \cdots, s^m$ はどの2つをとっても互いに素だから，定理11より

$$r(n) = r(p^aq^b\cdots s^d) = \mathrm{LCM}(r(p^a), r(q^b), \cdots, r(s^d))$$

である。ただし，その式に現れる $r(p^a), r(q^b), \cdots, r(s^d)$ は，定理9により求められる。

以上を用いて，いくつか具体例を考えてみる。

(1) $n = 3\cdot 7 = 21$ のとき。

$$r(21) = r(3\cdot 7) = \mathrm{LCM}(r(3), r(7)) = \mathrm{LCM}(1, 6) = 6$$

だから，21を分母とする既約分数の基本循環節の長さは6である。実際，$\frac{1}{21} = 0.\dot{0}4761\dot{9}$ となる。

(2) $n = 19\cdot 31 = 589$ のとき。

$$r(589) = r(19\cdot 31) = \mathrm{LCM}(r(19), r(31)) = \mathrm{LCM}(18, 15) = 90$$

となる。実際，

$$\frac{1}{589} = 0.\dot{0}01697792869269949066213921901528013582342954 \\ 159592529711375212224108658743633276740237 69\dot{1} \tag{4-3}$$

である。

(3) $n = 13\cdot 23 = 299$ のとき。

$$r(299) = r(13\cdot 23) = \mathrm{LCM}(r(13), r(23)) = \mathrm{LCM}(6, 22) = 66$$

となる。実際，

$$\frac{1}{299} = 0.\dot{0}033444816053511705685618729096 98 \\ 99665551839464882943143812709030\dot{1} \tag{4-4}$$

である。

(4) $n = 7^2\cdot 17 = 833$ のとき。

$$r(833) = r(7^2\cdot 17) = \mathrm{LCM}(r(7^2), r(17)) = \mathrm{LCM}(6\cdot 7, 16) = 336$$

となる。

5　シフト系とその性質（その 2）

定理 6 で次のことが示された。

分母 n が 2, 5 以外の素数で，しかも基本循環節の長さ $r(n)$ が偶数のとき，$r(n)=2r$ として，基本循環節を $A=\left[a_1, a_2, \cdots, a_r, b_1, b_2, \cdots, b_r\right]$ とすると，次の (*) が成り立つ。

$$(*)\begin{cases} a_i+b_i=9 \quad (i=1,2,\cdots,r) \\ \frac{n-k}{n} \text{ の基本循環節は，} A \text{ を } r \text{ 回シフトした } \left[b_1, b_2, \cdots, b_r, a_1, a_2, \cdots, a_r\right] \text{ である。} \end{cases}$$

(*) は，シフト系を円の形に図示したとき，円の内側においては，向かい合っている値の和はどれも 9 であり，円の外側においては，向かい合っている値の和はどれも n であることを意味している。

n が合成数のときには，$r(n)$ が偶数であっても (*) は必ずしも成り立つとはかぎらない。そこで以下，(*) が成り立つための，n に関する条件を調べることにする。

なお，定理 6 の証明過程から明らかなように，(*) が成り立つかどうかは，$r(n)=2r$ としたとき，

$$10^r+1 \equiv 0 \pmod n$$

が成り立つかどうかで決まる。上式が成り立つことと，(*) が成り立つことは同値である。以下の考察は，このことを大前提としている。

まず，n が素数の冪乗である場合から考察を始める。

【定理 12】

p を 2, 5 以外の素数とする。$r(p)$ が偶数であれば，$n=p^k$（k は自然数）に関して (*) が成り立つ。$r(p)$ が奇数のときは，$r(n)$ が奇数となるため (*) の成立/不成立は言えない。

（証明）

$k=1$ のときは，すでに定理 6 により示されているから，$k \geqq 2$ とする。p をランク e の素数とすると，

$$r(n)=\begin{cases} r(p) & (k \leqq e \text{ のとき}) \\ r(p)p^{k-e} & (k>e \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，$r(p)$ が偶数であることと，$r(n)$ が偶数であることは同値である。ここでは偶数になることを仮定し，$r(n)=2r$ とおく。すると，r は

$$10^{2r}-1=(10^r-1)(10^r+1) \equiv 0 \pmod{p^k}$$

を満たす最小の自然数である。ここで，$(10^r-1, 10^r+1)=1$ である。なぜなら，$(10^r-1, 10^r+1)=g$ とすると，$(10^r+1)-(10^r-1)=2$ より $g \mid 2$ である。一方，10^r-1, 10^r+1 とも奇数だから g は奇数である。故に，$g=1$ である。よって，

$$10^r-1 \equiv 0 \pmod{p^k} \quad \text{または} \quad 10^r+1 \equiv 0 \pmod{p^k}$$

でなければならない。ところが，$r(p^k)=2r>r$ より $10^r-1 \equiv 0 \pmod{p^k}$ は成り立たない。よって，$10^r+1 \equiv 0 \pmod{p^k}$ である。　Q.E.D.

次に，n が 2 種以上の素数からなる合成数である場合を考察する。

【定理 13】

$p, q, \cdots, s$ は 2, 5 以外の互いに異なる素数とする。このとき，$r(p), r(q), \cdots, r(s)$ がすべて偶数で，しかも，それぞれに素因数 2 が同個数ずつ含まれているとき，$n=p^k q^l \cdots s^m$ ($k, l, \cdots, m$ は自然数）に関して (*) が成り立つ。$r(p), r(q), \cdots, r(s)$ が上の条件を満たさないときには，(*) は成り立たない。

（証明）

$n=p^k q^l \cdots s^m$ において，$p^k, q^l, \cdots, s^m$ は，どの 2 つをとっても互いに素だから，定理 11 より

$$r(n)=\mathrm{LCM}(r(p^k), r(q^l), \cdots, r(s^m))$$

である。ここで, p をランク e の素数とするとき, $r(p^k)$ は $r(p)$ または $r(p)p^{k-e}$ に等しいから, $r(p^k)$ に含まれる素因数 2 の個数は, $r(p)$ に含まれる素因数 2 の個数に等しい (p は奇数だから)。q^l, $\cdots$, s^m についても同様である。

まず, $r(p), r(q), \cdots, r(s)$ がすべて奇数のときは, $r(n) = \mathrm{LCM}(r(p^k), r(q^l), \cdots, r(s^m))$ が奇数になるため, (*) の成立/不成立を言うことができない。そこで, 以下では, $r(p), r(q), \cdots, r(s)$ の中に偶数が含まれている場合を考える。それらに含まれる素因数 2 の個数をそれぞれ $u, v, \cdots, w$ とする。すなわち,

$$r(p^k) = 2^u U, \quad r(q^l) = 2^v V, \ \cdots, \ r(s^m) = 2^w W$$

とする ($U, V, \cdots, W$ はすべて奇数)。また, $z = \max(u, v, \cdots, w)$ とする ($z \geqq 1$)。そのとき,

$$r(n) = \mathrm{LCM}(r(p^k), r(q^l), \cdots, r(s^m)) = \mathrm{LCM}(2^u U, 2^v V, \cdots, 2^w W) = 2^z \mathrm{LCM}(U, V, \cdots, W)$$

である。故に, $r(n) = 2r$ とおくと,

$$r = 2^{z-1}\mathrm{LCM}(U, V, \cdots, W) \tag{5–1}$$

となる。そこでまず, $u = v = \cdots = w$ ではない場合を考える。$\min(u, v, \cdots, w) = w$ としても一般性は失われない。そのとき, $w \leqq z-1$ であるから, (5–1) より r は $2^w W$ の倍数となる。つまり, $r(s^m) \mid r$ である。一方, $r(s^m)$ は

$$10^x - 1 \equiv 0 \pmod{s^m}$$

を満たす最小の自然数 x であり, $r(s^m)$ の倍数はすべて上の式を満たすから,

$$10^r - 1 \equiv 0 \pmod{s^m} \qquad \therefore\ s^m \mid (10^r - 1)$$

が成り立つ。また,

$$10^{2r} - 1 = (10^r - 1)(10^r + 1) \equiv 0 \pmod{p^k q^l \cdots s^m} \tag{5–2}$$

において, $(10^r - 1, 10^r + 1) = 1$ だから, $s^m \mid (10^r - 1)$ より, $s^m \nmid (10^r + 1)$ である。したがって, $n \nmid (10^r + 1)$ となり, $10^r + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$ である。よって, $u = v = \cdots = w$ でない場合には, (*) は成立しない。

次に, $u = v = \cdots = w\ (\geqq 1)$ の場合を考える。そのとき, $z = u = v = \cdots = w$ であるから, (5–1) より, r は $2^u U,\ 2^v V, \cdots,\ 2^w W$ のいずれの倍数にもならない。つまり, r は $r(p^k),\ r(q^l), \cdots,\ r(s^m)$ のいずれの倍数でもない。したがって,

$$10^r - 1 \not\equiv 0 \pmod{p^k}, \quad 10^r - 1 \not\equiv 0 \pmod{q^l}, \ \cdots, \quad 10^r - 1 \not\equiv 0 \pmod{s^m} \tag{5–3}$$

である。なぜなら, $10^x - 1 \equiv 0 \pmod{p^k}$ を満たす自然数 x は $r(p^k)$ の倍数に限られ, q^l, $\cdots$, s^m についても同様だから。

一方, (5–2) より, $p^k q^l \cdots s^m \mid (10^r - 1)(10^r + 1)$ であり, さらに, $(10^r - 1, 10^r + 1) = 1$ である。故に, $p^k \mid (10^r - 1)$ または $p^k \mid (10^r + 1)$ のいずれか一方 (しかも一方だけ) が必ず成り立つ。q^l, $\cdots$, s^m についても同様である。このことと(5–3)より,

$$10^r + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad 10^r + 1 \equiv 0 \pmod{q^l}, \ \cdots, \quad 10^r + 1 \equiv 0 \pmod{s^m}$$

がすべて成り立たねばならない。よって,

$$10^r + 1 \equiv 0 \pmod{p^k q^l \cdots s^m} \quad \text{すなわち} \quad 10^r + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

である。故に, $u = v = \cdots = w \geqq 1$ のときには (*) が成り立つ。 Q.E.D.

定理 13 は, 定理 6 と定理 12 をも包括した, 一般的な定理となっている。すなわち, 偶数長の基本循環節が示すユニークな性質である (*) が, どのような場合に成り立ち, どのような場合に成り立たないかを判定するための最も一般的な条件を与えているのが, 定理 13 である。

いくつかの具体例によって, 定理 13 を検証してみる。

(例 1)　$n = 19 \cdot 31 = 589$ の場合。

$r(19) = 18$ は偶数だが, $r(31) = 15$ が奇数なので, (*) は成立しない。実際, (4–3) に $\frac{1}{589}$ の小数表現を

示している。これを見ると，たしかに (*) は成立していない。

(注) (4–3) では，基本循環節 (長さ90) を2等分して上下に並べている。円形に並べたときに向かい合う位置に来る値が，(4–3) では上下に並ぶ形になっている。上下の和が9になっていないことが確かめられる。

(例2)　$n = 13 \cdot 23 = 299$ の場合。

$r(13) = 6,\ r(23) = 22$ で，これはともに偶数であり，しかも，どちらにも素因数2は1個ずつ含まれる。よって，(*) は成立する。

実際，(4–4) に $\frac{1}{299}$ の小数表現が示されている。基本循環節 (長さ66) を2等分して上下に並べている。上下の和がどれも9であることが確かめられる。

(例3)　$n = 11 \cdot 17 = 187$ の場合。

$r(11) = 2,\ r(17) = 16$ で，どちらも偶数であるが，含まれる素因数2の個数が違う。したがって，この場合には (*) は成立しない。検証してみる。$r(11 \cdot 17) = \mathrm{LCM}(2, 16) = 16$ より，基本循環節の長さは16であり，$\frac{1}{187}$ を小数に表すと，

$$\frac{1}{187} = 0.\dot{0}0534759$$
$$35828877\dot{7}$$

となる。たしかに (*) は成立していない。

(例4)　$n = 29 \cdot 89 = 2581$ の場合。

$r(29) = 28,\ r(89) = 44$ で，どちらにも素因数2が2個ずつ含まれる。よって，この場合 (*) は成立する。$\frac{1}{2581}$ の基本循環節の長さは $\mathrm{LCM}(28, 44) = 308$ であり，これを77個ずつ4段に分けて示すと，下のようになる。

00038744672607516466485858194498256489732661759008136381247578457962030220844
63386284385896939170864006199147617202634637737311119721038357225881441301820
99961255327392483533514141805501743510267338240991863618752421542037969779155
36613715614103060829135993800852382797365362262688880278961642774118558698179

1段目と3段目，2段目と4段目に着目して上下の和を求めると，どれも9であることが確認できる。

(例5)　$n = 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 7007$ の場合。

$r(7) = 6,\ r(11) = 2,\ r(13) = 6$ で，どれも素因数2を1個ずつ含む。よって，この場合，(*) は成り立つ。実際，$\frac{1}{7007}$ の基本循環節長は $\mathrm{LCM}(6 \cdot 7, 2, 6) = 42$ であり，それを21個ずつ2段に分けて示すと，次のようになる。

000142714428428714142
999857285571571285857

上下の和はたしかにどれも9である。

なお，上の例では，円の外側の対極の和が n に等しいことの確認は省略した。

6　結論

以上の考察よりわかったことをまとめておく。

n を，1より大きくて10と互いに素である自然数とする。分母を n に固定した既約分数の集合

$$S(n) = \left\{ \frac{k}{n} \,\middle|\, 1 \leqq k \leqq n-1,\ (n, k) = 1 \right\}$$

を考える。$S(n)$ に対して以下の性質が成り立つ。

(1) $S(n)$ に属するどの分数も，それを小数で表すと純循環小数になり，基本循環節の長さはすべて等しい。

(2) n を素因数分解したとき $n=p^k q^l \cdots s^m$ になるとする。このとき，基本循環節の長さ $r(n)$ は

$$r(n)=\mathrm{LCM}(r(p^k),\ r(q^l),\ \cdots,\ r(s^m))$$

である。ただし，素数 p のランクを e とするとき，

$$r(p^k)=\begin{cases} r(p) & (k \leqq e \text{ のとき}) \\ r(p)p^{k-e} & (k > e \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。$r(q^l),\ \cdots,\ r(s^m)$ についても同様である。なお，素数のランクはほとんどが 1 である。筆者が調べた範囲 (100 万以下) では，ランク 2 の素数は 3 と 487 のみであり，ランク 3 以上の素数は存在しない。

(3) $S(n)$ に属する分数は，$r(n)$ 個で 1 組のシフト系に分類され，そのようなシフト系が全部で $\frac{\varphi(n)}{r(n)}$ 組できる。同一のシフト系に属する分数の基本循環節は，それを適当にシフトすれば，すべて同一パターンに重なる。

(4) n が 3 の倍数でないとき，どのシフト系においても，次の性質が成り立つ。

- 基本循環節の長さ $r(n)$ を r とし，そのシフト系に属する基本循環節の一つを $A=\left[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_r\right]$ とすると，
$$\sum_{i=1}^{r} a_i \equiv 0 \pmod 9$$
- A をシフトして得られる r 通りの基本循環節を A_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ とし，基本循環節が A_i になる分数の分子を k_i とすると，
$$\sum_{i=1}^{r} k_i \equiv 0 \pmod n$$

(5) 特に，$r(n)$ が偶数 $(=2r$ とする$)$ のときには，基本循環節の 1 つを $A=\left[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2r}\right]$ としたとき，上の (4) をより強めた次の性質が成り立つことがある。

- $a_i+a_{i+r}=9$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$
- A を j 回シフトした A_j を基本循環節とする分数の分子を k_j とすると，
$$k_i+k_{i+r}=n \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

(6) 上の (5) が成り立つのは，n が次の条件を満たすときであり，しかもそのときに限られる。

　n を素因数分解したとき $n=p^k q^l \cdots s^m$ になるとし，$r(p),\ r(q),\ \cdots,\ r(s)$ に含まれる素因数 2 の個数をそれぞれ $u,\ v,\ \cdots,\ w$ とするとき，$u=v=\cdots=w \geqq 1$ である。

7　付録

素数 p に対する $r(p)$ の値を, 2000 までの全素数について示しておく。

p	$r(p)$	p	$r(p)$	p	$r(p)$	p	$r(p)$	p	$r(p)$	p	$r(p)$	p	$r(p)$	p	$r(p)$
3	1	179	178	401	200	643	107	907	151	1171	1170	1453	726	1723	287
7	6	181	180	409	204	647	646	911	455	1181	1180	1459	162	1733	866
11	2	191	95	419	418	653	326	919	459	1187	593	1471	735	1741	1740
13	6	193	192	421	140	659	658	929	464	1193	1192	1481	740	1747	291
17	16	197	98	431	215	661	220	937	936	1201	200	1483	247	1753	584
19	18	199	99	433	432	673	224	941	940	1213	202	1487	1486	1759	879
23	22	211	30	439	219	677	338	947	473	1217	1216	1489	248	1777	1776
29	28	223	222	443	221	683	341	953	952	1223	1222	1493	373	1783	1782
31	15	227	113	449	32	691	230	967	322	1229	1228	1499	214	1787	893
37	3	229	228	457	152	701	700	971	970	1231	41	1511	755	1789	1788
41	5	233	232	461	460	709	708	977	976	1237	206	1523	761	1801	900
43	21	239	7	463	154	719	359	983	982	1249	208	1531	1530	1811	1810
47	46	241	30	467	233	727	726	991	495	1259	1258	1543	1542	1823	1822
53	13	251	50	479	239	733	61	997	166	1277	638	1549	1548	1831	305
59	58	257	256	487	486	739	246	1009	252	1279	639	1553	1552	1847	1846
61	60	263	262	491	490	743	742	1013	253	1283	641	1559	779	1861	1860
67	33	269	268	499	498	751	125	1019	1018	1289	92	1567	1566	1867	933
71	35	271	5	503	502	757	27	1021	1020	1291	1290	1571	1570	1871	935
73	8	277	69	509	508	761	380	1031	103	1297	1296	1579	1578	1873	1872
79	13	281	28	521	52	769	192	1033	1032	1301	1300	1583	1582	1877	938
83	41	283	141	523	261	773	193	1039	519	1303	1302	1597	133	1879	313
89	44	293	146	541	540	787	393	1049	524	1307	653	1601	200	1889	118
97	96	307	153	547	91	797	199	1051	1050	1319	659	1607	1606	1901	380
101	4	311	155	557	278	809	202	1061	212	1321	55	1609	201	1907	953
103	34	313	312	563	281	811	810	1063	1062	1327	1326	1613	403	1913	1912
107	53	317	79	569	284	821	820	1069	1068	1361	680	1619	1618	1931	386
109	108	331	110	571	570	823	822	1087	1086	1367	1366	1621	1620	1933	21
113	112	337	336	577	576	827	413	1091	1090	1373	686	1627	271	1949	1948
127	42	347	173	587	293	829	276	1093	273	1381	1380	1637	409	1951	195
131	130	349	116	593	592	839	419	1097	1096	1399	699	1657	552	1973	986
137	8	353	32	599	299	853	213	1103	1102	1409	32	1663	1662	1979	1978
139	46	359	179	601	300	857	856	1109	1108	1423	158	1667	833	1987	331
149	148	367	366	607	202	859	26	1117	558	1427	713	1669	556	1993	664
151	75	373	186	613	51	863	862	1123	561	1429	1428	1693	423	1997	998
157	78	379	378	617	88	877	438	1129	564	1433	1432	1697	1696	1999	999
163	81	383	382	619	618	881	440	1151	575	1439	719	1699	566		
167	166	389	388	631	315	883	441	1153	1152	1447	1446	1709	1708		
173	43	397	99	641	32	887	886	1163	581	1451	290	1721	430		

８　参考文献

[1] 河田 敬義 :「岩波講座 基礎数学 数論 I」(1978年) 岩波書店

[2] Mutsumi Komuro :「小数展開の問題 (循環節の長さとオイラーの関数)」
http://math-sci.hp.infoseek.co.jp/Math/fraction2.html

[3] 早苗雅史 :「循環小数に潜む謎」
http://www.nikonet.or.jp/spring/sanae/MathTopic/jyunkan/jyunkan.htm

[4] 知念 宏司 :「循環小数もおもしろい」
http://www.math.kindai.ac.jp/~chinen/junkan_f/junkan.html